مقدمه ناشر

از خدایگان فیزیک «مستر اینشتین» می‌فرمایند: «از وقتی که ریاضی‌دانان از سر و کول «نظریهٔ نسبیت» بالا رفته‌اند، دیگر خودم هم از آن سر در نمی‌آورم.»

این‌طوریه که اگه شما ریاضی‌دان باشید، حتی مستر اینشتین هم به گرد پاتون نمی‌رسه ...

پس انقد پشت سر درس شیرین ریاضیات غر نزنید و مطمئن باشید که حتی پیداکردن نقطهٔ عطف تابع یه جایی بهتون کمک می‌کنه که نقطهٔ عطف زندگی‌تون رو پیدا کنید و همه چی از این رو به اون رو بشه ...

از استاد عزیز و بزرگوار، آقای هاشمی طاهری برای تألیف این کتاب خوب و مفید بسیار سپاس‌گزاریم.

مقدمه مؤلف

وقتی بهم پیشنهاد شد تا کتاب جیبی حسابان رو بنویسم، یاد دانش‌آموزایی افتادم که همش می‌گن:
«آقا درس ریاضی سفته و زیاد، تازه‌شم ما کارای مهم‌تریم داریما یه چیزایی بگین تا نمره‌شو بیاریمو درکشم بکنیم»

پیش خودم گفتم دم خیلی‌سبزیا گرم! زدن تو خال.

حالا دُرسته که اینا جوجه کتابن، اما ضرب‌المثلی می‌گه «فلفل نبین چه …»

شمام بشکنیدش تا نتیجشو ببینین! واسه این ادعام سه دلیل عمده دارم:

اولنش: درس‌نامه‌ش کافیه و کامل؛ یعنی هر چه از کتاب درسی بخواین تو اینم هستش، پس یه جزوهٔ درسی کامله.

دومنش: بعد از هر مطلب درسی، مثال یا مثالایی آوردم که حسابی اون درس حالیمون بشه، تازه سؤالاتشم از ساده می‌ره تا یه کمی سخت.

سومنش: آخرای هر فصل، آزمونایی ده‌سؤاله اومده که می‌تونین خودتونو با اونا بسنجین، پس واسه شرکت تو آزمونام مناسبه.

دیگه چی می‌خواین؟

موفق باشین ــ هاشمی طاهری

فهرست

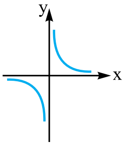
فصل (۱)

تـابـع

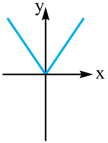
درس ۱

تبدیل نمودار تابع

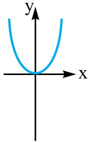
یادآوری نمودار چند تابع خاص: در زیر، نمودار چند تابع که در سال‌های گذشته با آن‌ها آشنا شده‌اید جهت یادآوری آورده شده‌اند. آگاهی از این نمودارها برای ادامهٔ بحث از الزامات اساسی است.



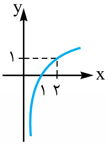
$y = \frac{۱}{x}$



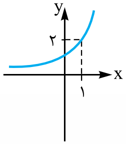
$y = |x|$



$y = x^{۲}$



$y = \log_{۲} x$



$y = ۲^{x}$

در سال‌های قبل دیدیم که اگر نمودار تابعی مانند $f(x)$ را داشته باشیم، چگونه می‌توان نمودار توابع خاصی که از $f(x)$ ساخته می‌شوند را مشخص نمود. در ادامه این موارد مطرح شده‌اند.

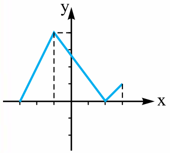
الف. انتقال عمودی و افقی توابع

۱ هرگاه نمودار $f(x)$ معلوم و k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار $f(x)+k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به طرف بالا انتقال دهیم (واضح است که اگر k منفی باشد، باید k واحد به طرف پایین انتقال دهیم).

۲ هرگاه نمودار $f(x)$ معلوم و k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم (واضح است که اگر k منفی باشد، باید k واحد به سمت راست انتقال دهیم).

تست

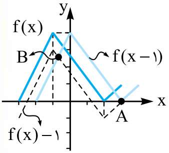
اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، آن‌گاه دو تابع $f(x)-1$ و $f(x-1)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟



۱) هیچ　　　　۲) یک

۳) دو　　　　۴) بی‌شمار

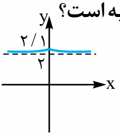
پاسخ **گزینهٔ ۳** برای رسم نمودار $f(x)-1$ باید $f(x)$ را یک واحد پایین بیاوریم که با خط‌چین رسم شده است و برای رسم نمودار $f(x-1)$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. ملاحظه می‌کنیم که دو تابع $f(x)-1$ و $f(x-1)$ فقط در دو نقطهٔ A و B اشتراک دارند.



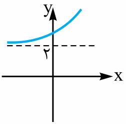
تست

نمودار تابع $f(x)=2^x$ را می‌شناسید. نمودار تابع $2^{x-1}+2$ به کدام گزینه شبیه است؟

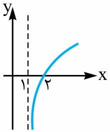
۱)



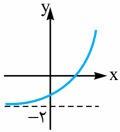
۲)

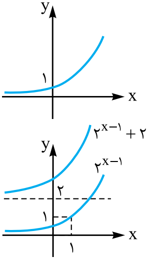


۳)



۴)





پاسخ | گزینهٔ ۲ نمودار ۲^x به شکل مقابل است.
برای رسم نمودار $۲^{x-۱}$ باید نمودار ۲^x را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. حالا اگر نمودار را ۲ واحد بالا ببریم، نمودار $۲^{x-۱}+۲$ به دست می‌آید. مشاهده می‌کنید که نمودار حاصل، شبیه گزینهٔ (۲) است.

تعیین دامنه و برد توابع پس از انتقال عمودی و افقی:

اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ و k عددی مثبت باشد، آن‌گاه:

الف دامنهٔ تابع $y=f(x)+k$، برابر با $D_y=[a,b]$ و برد آن $R_y=[c+k,d+k]$ است. به بیان دیگر:

> در انتقال عمودی، دامنهٔ تابع تغییر نمی‌کند ولی به هر عضو از برد آن، k واحد اضافه می‌شود.

ب دامنهٔ تابع $y=f(x+k)$، برابر $D_y=[a-k,b-k]$ و برد آن $R_y=[c,d]$ است. به بیان دیگر:

> در انتقال افقی، از هر عضو دامنهٔ آن k واحد کم می‌شود ولی برد آن تغییر نمی‌کند.

تست

اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $[-۱,۳]$ و $[۰,۲]$ باشند، آن‌گاه دامنه و برد تابع $f(x+۱)-۲$ کدام‌اند؟

۱) $R=[۲,۴]\,,\,D=[۰,۴]$
۲) $R=[-۲,۰]\,,\,D=[-۲,۲]$
۳) $R=[-۲,۰]\,,\,D=[۰,۴]$
۴) $R=[۲,۴]\,,\,D=[-۲,۲]$

پاسخ گزینهٔ ۲ تابع ۱ واحد به سمت چپ انتقال می‌یابد، پس دامنهٔ تابع جدید به صورت $[-۱-۱,۳-۱]$؛ یعنی $D=[-۲,۲]$ است.
ضمناً تابع ۲ واحد به طرف پایین انتقال می‌یابد، پس برد آن $[۰+(-۲),۲+(-۲)]$؛ یعنی $R=[-۲,۰]$ است.

ب. انبساط و انقباض در راستای عمودی

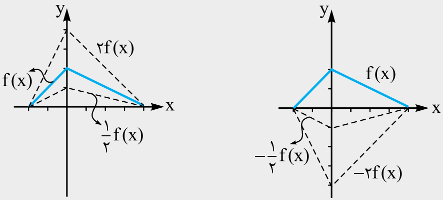
هرگاه نمودار تابع $f(x)$ معلوم باشد، برای رسم نمودار $kf(x)$ عرض‌های نقاط تابع $f(x)$ را (بدون تغییر طول آن‌ها) k برابر می‌کنیم.

نکته

۱ واضح است که در $kf(x)$ اگر $|k|>۱$ باشد، نمودار $f(x)$ در راستای محور yها منبسط می‌شود و اگر $۰<|k|<۱$ باشد، شکل منقبض خواهد شد.

۲ اگر $k>۰$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور xها تغییر نمی‌کند ولی اگر $k<۰$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور xها تغییر می‌کند؛ بدین معنی که اگر $k<۰$ باشد، قسمت‌هایی از $f(x)$ که زیر محور xها قرار دارند به بالای محور xها می‌آیند و قسمت‌هایی از $f(x)$ که بالای محور xها هستند، به پایین محور xها می‌آیند.

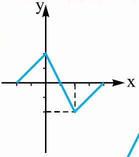
به شکل‌های زیر توجه کنید:



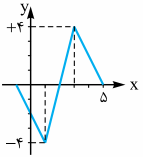
نتیجهٔ مهم نمودار $-f(x)$ قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها است.

تست

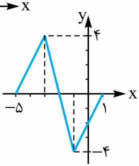
نمودار $f(x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $-2f(x-1)$ کدام است؟



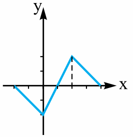
۱)



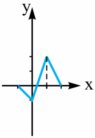
۲)

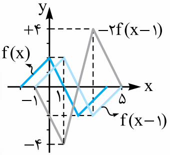


۳)



۴)





پاسخ گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ ۱ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x-1)$ پدید آید و سپس عرض‌های آن را -2 برابر می‌کنیم تا نمودار $-2f(x-1)$ به دست آید. ملاحظه می‌کنید که نمودار حاصل شبیه گزینهٔ (۱) است.

تست

نمودار منحنی $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند، سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به دست آمده با محور xها، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -4 ۲) -3 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ گزینهٔ ۳ ضابطهٔ منحنی جدید به صورت $f(x-(k-2))+k$ است؛ یعنی $y=\sqrt{4-(x-k+2)}+k \Rightarrow y=\sqrt{2+k-x}+k$

چون این منحنی، وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کند و مختصات نقطهٔ برخورد با تابع وارون روی نیمساز ربع اول و سوم است، پس نقطهٔ $A(1,1)$ روی این تابع می‌باشد و داریم:

$$1=\sqrt{2+k-1}+k \Rightarrow 1-k=\sqrt{1+k} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1-2k+k^2=1+k \Rightarrow k^2-3k=0 \Rightarrow k=0 \text{ یا } 3$$

اما $k=3$ درمعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند، پس $k=0$.

اگر $k=0$ باشد، ضابطهٔ تابع جدید $y=\sqrt{2-x}$ است که اگر آن را یک واحد در راستای قائم رو به پایین انتقال دهیم به صورت $y=\sqrt{2-x}-1$ تبدیل می‌شود. طول نقطهٔ برخورد این تابع با محور xها، ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{2-x}-1=0$ است. $\sqrt{2-x}=1 \Rightarrow 2-x=1 \Rightarrow x=1$

پ. انبساط و انقباض در راستای افقی

هرگاه نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی را (بدون تغییر عرض آن‌ها) $\frac{1}{k}$ برابر کنیم. (واضح است که باید $k\neq 0$ باشد!)

نکته

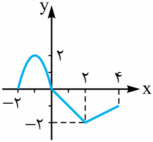
۱ در تابع $f(kx)$ اگر $|k|>1$ باشد، آن‌گاه نمودار $f(x)$ در راستای محور xها منقبض می‌شود و اگر $0<|k|<1$ باشد، آن‌گاه نمودار $f(x)$ در راستای محور xها منبسط می‌شود.

۲ اگر $k>0$ باشد، آن‌گاه موقعیت شکل نسبت به محور yها تغییر نمی‌کند ولی اگر $k<0$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور yها عوض می‌شود. یعنی اگر $k<0$ باشد، قسمتی از منحنی که سمت راست محور yها بوده به سمت چپ آن منتقل می‌شود و برعکس.

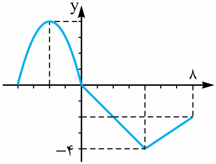
نتیجهٔ مهم | نمودار $f(-x)$، قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها است.

تست

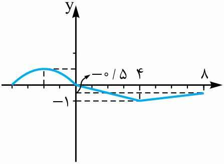
اگر شکل مقابل نمودار $f(x)$ باشد، نمودار $\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})$ کدام است؟



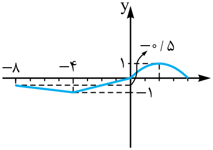
۱)



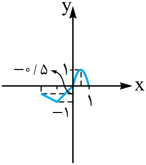
۲)



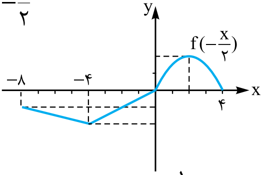
۳)



۴)

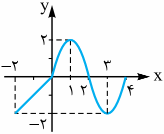


پاسخ | **گزینهٔ ۳** $-\frac{x}{2}$ یعنی $-\frac{1}{2}x$. پس باید طول‌های تابع را $\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$ برابر کنیم، پس نقطه‌ای که طول آن در $f(x)$ برابر ۴ است در $f(-\frac{x}{2})$ برابر ۸− است و ... (شکل مقابل) پدید می‌آید). چون $f(-\frac{x}{2})$ در $\frac{1}{2}$ ضرب شده، پس عرض هر نقطهٔ $f(-\frac{x}{2})$ باید $\frac{1}{2}$ برابر، یعنی نصف شود، در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.



تست

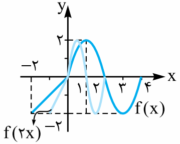
اگر نمودار $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار $-f(2x)$ با $f(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارد؟



۱) ۱   ۲) ۲

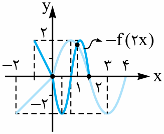
۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ | گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار $f(2x)$ باید طول‌های نقاط را نصف کنیم (بدون تغییر عرض) تا شکل ۱ پدید آید و برای رسم $-f(2x)$ باید $f(2x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم که در شکل به صورت رنگی رسم شده است. مشاهده می‌شود $-f(2x)$ و $f(x)$ در سه نقطه مشترک هستند.



(شکل ۱)

$\Rightarrow$



(شکل ۲)

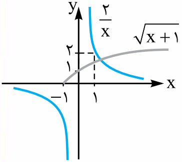
تست

معادلهٔ $\sqrt{x+1}=\frac{2}{x}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) سه

پاسخ | گزینهٔ ۲

ریشه‌های این معادله، طول‌های نقاط برخورد دو تابع $y_1=\frac{2}{x}$ و $y_2=\sqrt{x+1}$ هستند. نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ را می‌شناسیم و برای رسم نمودار $2f(x)=\frac{2}{x}$ باید عرض‌های آن را دو برابر کنیم.



نمودار $\sqrt{x}$ را نیز می‌شناسیم و برای رسم نمودار $\sqrt{x+1}$ باید نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.
با توجه به نمودار، این دو تابع فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشه دارد.

تعیین دامنه و برد توابع پس از انقباض و انبساط: اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشند، آن‌گاه:

الف دامنهٔ تابع $y=kf(x)$، برابر با $D_y=[a,b]$ است؛ یعنی در انبساط و انقباض عمودی، دامنهٔ تابع تغییر نمی‌کند.
برد تابع در حالتی که $k>0$ باشد، برابر $R_y=[kc,kd]$ و در حالتی که $k<0$ باشد، برابر $R_y=[kd,kc]$ است.

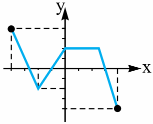
ب دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ در حالتی که $k>0$ باشد، برابر با $D_y=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ و در حالتی که $k<0$ باشد، برابر $D_y=[\frac{b}{k},\frac{a}{k}]$ است. برد آن تابع نیز $R_y=[c,d]$ است؛ یعنی در انبساط و انقباض افقی برد تابع تغییر نمی‌کند.

ت. ترکیب انتقال و انبساط انقباض در راستای افقی

فرض کنیم نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و بخواهیم نمودار تابع $y=f(kx+t)$ را رسم کنیم، باید توجه داشته باشیم که ابتدا انتقال را انجام می‌دهیم و سپس انبساط یا انقباض را اجرا می‌کنیم؛ بدین معنی که ابتدا تابع $f(x)$ را t واحد در جهت منفی محور xها انتقال می‌دهیم تا $f(x+t)$ و سپس طول هر یک از نقاط را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم تا $f(kx+t)$ به دست می‌آید.

تست

شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه و برد تابع $y=f(۲x+۱)$ کدام است؟



$f(x)$

۱) $D=[-۲,۲]$ و $R=[-۳,۵]$

۲) $D=[-۲,۲]$ و $R=[-۴,۴]$

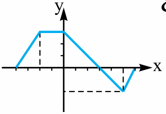
۳) $D=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$ و $R=[-۴,۴]$

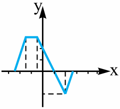
۴) $D=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$ و $R=[-۵,۳]$

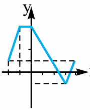
پاسخ **گزینهٔ ۳** با توجه به شکل معلوم می‌گردد که $D_f=[-۴,۴]$ و $R_f=[-۴,۴]$ است. چون می‌خواهیم دامنه و برد تابع $y=f(۲x+۱)$ را مشخص کنیم و عملیات روی تابع $f(x)$ فقط افقی است، پس برد آن تغییری نمی‌کند؛ یعنی $R_y=[-۴,۴]$ است. از طرفی برای رسم نمودار $f(۲x+۱)$ ابتدا باید تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم و سپس طول‌های آن را نصف کنیم. دامنهٔ تابع پس از یک واحد انتقال به سمت چپ $[-۵,۳]$ خواهد شد و اگر هر عضو آن را نصف کنیم، خواهیم داشت $D_y=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$.

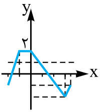
تست

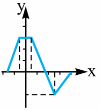
اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ کدام است؟



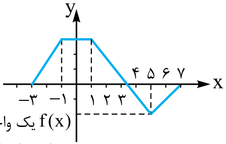
۱)


۲)


۳)


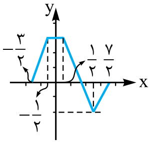
۴)


پاسخ گزینهٔ ۴ تابع $f(2x-1)$ فقط در راستای افقی انتقال و انقباض می‌یابد. ابتدا انتقال را انجام می‌دهیم؛ یعنی ۱+ واحد در جهت مثبت محور xها جابه‌جا می‌شویم (شکل ۱) و سپس طول نقاط را نصف می‌کنیم (شکل ۲).



$f(x)$ یک واحد به سمت راست انتقال یافت.

شکل (۱)



شکل (۲)

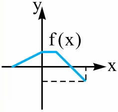
ملاحظه می‌شود که شکل نهایی مشابه گزینهٔ (۴) است.

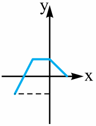
ث. ترکیب انتقال و انبساط، انقباض در راستای عمودی

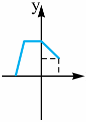
فرض کنیم نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و بخواهیم نمودار $y=kf(x)+t$ را رسم کنیم. برای این منظور ابتدا انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم و سپس انتقال را اجرا می‌کنیم؛ یعنی ابتدا تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم و سپس t واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

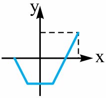
تست

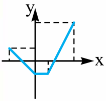
اگر نمودار $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار $y=-2f(x)+1$ به کدام صورت است؟



۱) 

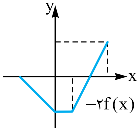
۲) 

۳) 

۴) 

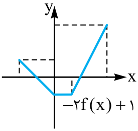
پاسخ گزینهٔ ۴

ابتدا باید عرض نقاط تابع $f(x)$ را -۲ برابر کنیم تا به شکل (۱) تبدیل شود:



شکل (۱)

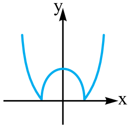
سپس نمودار $-۲f(x)$ را به اندازهٔ یک واحد در جهت مثبتِ محور yها انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-۲f(x)+۱$ حاصل شود. (شکل ۲)

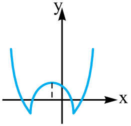


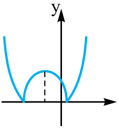
شکل (۲)

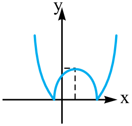
پرسش های تستی

۱- نمودار تابع $y = |x^2 + 2x - 1|$ شبیه کدام گزینه است؟

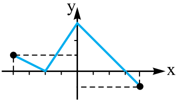
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، آن‌گاه نمودار تابع $f(x-1)-2$ محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟



۱) سه ۲) یک ۳) هیچ ۴) دو

۳- کدام گزینه دربارهٔ معادلهٔ $x^2 + 2x - \sin x - 1 = 0$ درست است؟

۱) دو ریشهٔ منفی دارد.

۲) دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت دارد.

۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.

۴) بی‌شمار ریشه دارد.

۴- کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $y = -\frac{1}{x}$ ۲) $y = x^2 + x$ ۳) $y = x^3 - x$ ۴) $y = x^3 + x$

۵- تابع $f(x) = x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $-\sqrt{x^3}\,; x \le 0$ ۲) $-\sqrt[3]{x}\,; x \le 0$ ۳) $-\sqrt{x^3}\,; x \ge 0$ ۴) $-\sqrt[3]{x}\,; x \ge 0$

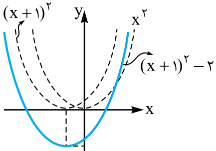
پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۳» می‌دانیم: $x^2+2x-1=x^2+2x+1-2=(x+1)^2-2$

پس: $y=|(x+1)^2-2|$

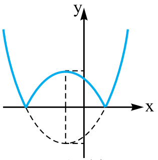
اگر $f(x)=x^2$ باشد، برای رسم نمودار $f(x+1)=(x+1)^2$ باید $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ ببریم. حالا اگر نمودار این تابع جدید را دو واحد پایین بیاوریم، نمودار $f(x+1)-2$ حاصل می‌شود. (شکل ۱)

برای رسم $|f(x+1)-2|$ کافی است قسمتی از نمودار $f(x+1)-2$ را که زیر محور xها است نسبت به محور xها قرینه کنیم (شکل ۲).



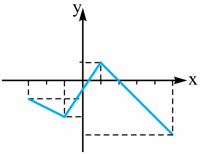
شکل (۱)

$\Rightarrow$

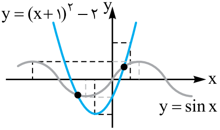


شکل (۲)

۲- گزینهٔ «۴» نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد پایین می‌آوریم تا نمودار $f(x-1)-2$ به دست آید (شکل مقابل). مشاهده می‌شود که این تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.



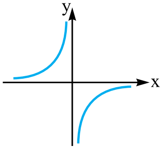
۳- گزینهٔ «۳» معادله را به صورت $x^2+2x-1=\sin x$ یا $(x+1)^2-2=\sin x$ تبدیل می‌کنیم. ریشه‌های این معادله طول‌های نقاط برخورد دو تابع $y_1=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ و $y_2=\sin x$ هستند.



نمودار این دو تابع در شکل مقابل رسم شده‌اند و مشاهده می‌کنیم که دو نقطهٔ برخورد دارند که طول یکی مثبت و طول دیگری منفی است.

۴- گزینهٔ «۴» چون $x^۳$ و x هر دو صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز تابعی صعودی است.

دقت کنید تابع $\frac{-۱}{x}$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل دامنه چنین نیست. مثلاً $-۲ < ۲$ و چون $f(-۲) = \frac{۱}{۲}$ و $f(۲) = \frac{-۱}{۲}$، پس $f(-۲) > f(۲)$ و این با صعودی‌بودن $f(x)$ در تناقض است، پس تابع $-\frac{۱}{x}$ اکیداً صعودی نیست.



۵- گزینهٔ «۴»

$$f(x) = x^۲\sqrt{x^۲} = x^۲|x| = \begin{cases} x^۲ \times x & x > ۰ \\ x^۲ \times (-x) & x \le ۰ \end{cases} = \begin{cases} x^۳ & x > ۰ \\ -x^۳ & x \le ۰ \end{cases}$$

این تابع در بازهٔ $(۰,+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی است و باید ضابطهٔ وارون آن را در بازهٔ $(-\infty,۰)$ پیدا کنیم. برای یافتن ضابطهٔ تابع وارون باید x را به y و y را به x تبدیل کنیم:

$$y = -x^۳ ; x \le ۰, y \ge ۰ \xrightarrow[\text{را به } x \text{ تبدیل می‌کنیم.}]{x \text{ را به } y \text{ و } y}$$

$$x = -y^۳ ; y \le ۰, x \ge ۰ \Rightarrow y^۳ = -x ; x \ge ۰$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt[۳]{x} ; x \ge ۰$$